

Numéro :

SUJET D'EXAMEN
Année universitaire 2019-2020

Classe : Aéro-3

Type d'examen : DS 2

Matière : Transfert thermique

Code matière : En 311

Date : 21 novembre 2019

Horaire :

Durée : 1 h

Enseignant : Bouguechal / Gomit / Kasraoui

Documents autorisés : NON. Formulaire à la fin du document.

Calculatrices autorisées : NON Programmables

CADRE RÉSERVÉ A L'ENSEIGNANT :

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous paraît être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, vous le signalez clairement dans votre copie et vous poursuivez l'examen en proposant une solution.

Le barème est donné à titre indicatif.

Un formulaire est fourni à la fin du document.

Rédigez directement sur la copie.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1 :	/12	Exercice 2 :	/08	Formulaire.
--------------	-----	--------------	-----	-------------

CADRE RÉSERVÉ A L'ETUDIANT(E) :

Merci de compléter ce cadre et votre numéro en haut de page à gauche :

NOM :

Prénom :

Classe :

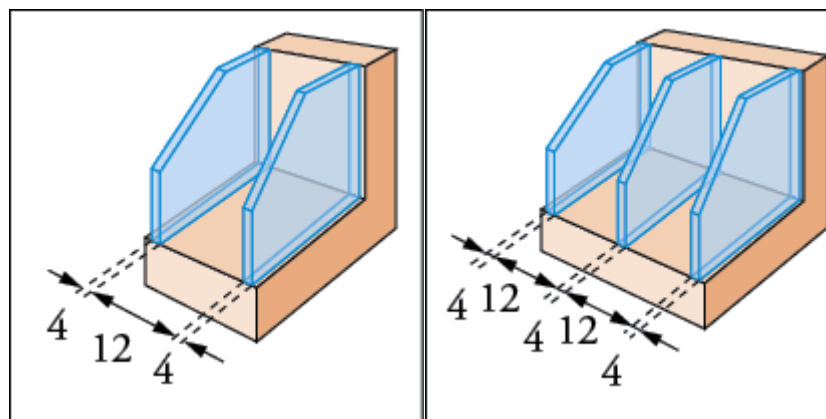
Exercice 1 : Etude des pertes thermiques dans un double et un triple vitrage (12 points)

L'objectif de cet exercice est de comparer les flux perdus dans le cas d'un double vitrage et d'un triple vitrage.

Le double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche gazeuse d'argon immobile.

Les deux plaques de verre sont identiques et ont chacune une épaisseur e_v . L'épaisseur de la couche d'argon est notée e_A . Les conductivités du verre et de l'argon sont notées respectivement λ_v et λ_A .

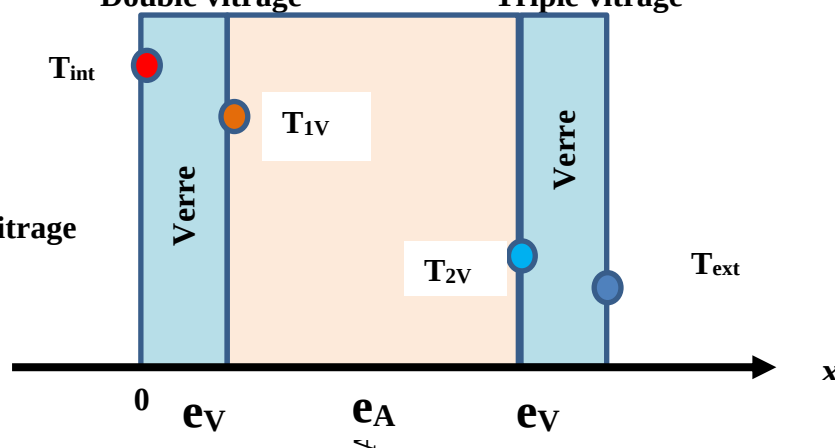
On notera T_{int} et T_{ext} les températures de part et d'autre du double vitrage, sur la face intérieure et extérieure et on appellera T_{1v} et T_{2v} les températures sur les faces internes des vitres (voir schéma). On appellera S la surface de la vitre.



Double vitrage

Triple vitrage

Schéma du double vitrage



Les résultats numériques doivent être donnés avec une notation scientifique avec 3 chiffres significatifs.

I. 1ère Partie : Double vitrage

Dans cette partie, on considère un double vitrage.

- Déterminer les expressions et valeurs des résistances thermiques de conduction d'une vitre R_v et de la couche d'argon R_A et en déduire la résistance totale de l'ensemble.
- Comparer ces résistances. Conclusion.
- Donner le schéma électrique équivalent avec toutes les données.
- En déduire l'expression et la valeur du flux de chaleur Φ traversant le double vitrage ainsi que la densité ϕ de flux.
- Donner l'expression et la valeur de T_{1v} et T_{2v} . Conclusion.

- f) Déterminer le profil de température dans chaque milieu et faire une représentation graphique.

II. 2ème Partie : Triple vitrage

On considère dans cette partie le triple vitrage avec $T_{\text{int}} = 20,0\text{ °C}$ et $T_{\text{ext}} = 15,0\text{ °C}$ entre ses deux faces extrêmes.

- Déterminer la résistance totale de l'ensemble.
- Comparer cette résistance totale par rapport à celle du double vitrage.
Conclusion.
- Déterminer l'expression et la valeur du flux de chaleur Φ traversant la vitre.
- Conclusion.

Données :

$$\lambda_V = 0.810\text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad e_V = 4,0\text{ mm}$$

$$\lambda_A = 0.018\text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad e_A = 12\text{ mm}$$

$$S = 1\text{ m}^2$$

$$T_{\text{int}} = 20\text{ °C}$$

$$T_{\text{ext}} = 15\text{ °C}$$

Voir page 5 !

Exercice 1 : Etude des pertes thermiques dans un double et un triple vitrage (Solution)

I. 1ère Partie : Double vitrage

a) Résistances thermiques

$$R_V = \frac{e_V}{\lambda_V S} = \frac{4,0 \cdot 10^{-3}}{0,810 \cdot 1} = 4,94 \cdot 10^{-3}\text{ °C/W} \quad 0,25*2$$

$$R_A = \frac{e_A}{\lambda_A S} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{0,018 \cdot 1} = 667 \cdot 10^{-3}\text{ °C/W} \quad 0,25*2$$

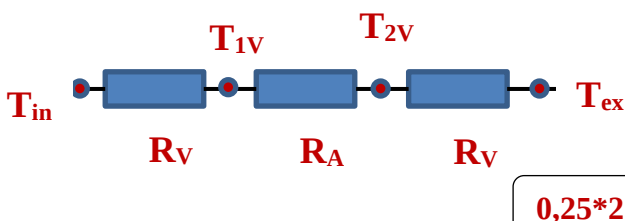
$$R_T = R_A + 2 R_V = 667 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 4,94 \cdot 10^{-3} = 0,677\text{ °C/W} \quad 0,25*2$$

b) Comparaison des résistances

La résistance d'une vitre est plus de 100 fois **plus petite** que la résistance de la couche d'air.

La résistance thermique **totale** est pratiquement égale à la résistance de la couche d'**Argon**. 0,25*2

c) Schéma électrique



d) Calcul du flux

$$\Phi = \Delta T / R = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_T} = \frac{20 - 15}{0,677} = 7,39\text{ W} \quad 0,25*2$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = 7,39\text{ W/m}^2 \quad 0,25*2$$

e) Expression et valeurs des températures.

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_T} = \frac{T_{\text{int}} - T_{1V}}{R_V}$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{T_{\text{int}} - T_{1V}}{R_V}$$

$$T_{1V} = T_{\text{int}} - R_V \Phi$$

$$T_{1V} = 20 - 4,94 \cdot 10^{-3} \cdot 7,39$$

$$T_{1V} = 19,96\text{ °C}$$

ATTENTION : $T_{1V} = 20,0\text{ °C}$ avec 3 chiffres significatifs ! 0,25*2

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{T_{2V} - T_{\text{ext}}}{R_V}$$

$$T_{2V} = T_{\text{ext}} + R_V \Phi$$

$$T_{2V} = 15 + 4,94 \cdot 10^{-3} \cdot 7,39$$

$$T_{2V} = 15,04\text{ °C}$$

$$T_{2V} = 15,0\text{ °C} \quad 0,25*2$$

Conclusion : La résistance de la vitre étant faible, la température de part et d'autre de la vitre est presque la même. 0.5

f) Profil de température dans chaque milieu.

La température dans ces 3 milieux s'obtient en utilisant l'équation de la chaleur sans source en coordonnées cartésiennes.

$$\Delta T = 0.$$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = a \quad 0.5*2$$

$$T(x) = ax + b$$

vitre 1 (intérieur) :

$$T_1(x) = ax + b$$

$$T_1(0) = b = T_{int} = 20^\circ\text{C}$$

$$T_1(e_V) = ae_V + T_{int} = T_{1V} \quad 0.25*2$$

$$a = \frac{T_{1V} - T_{int}}{e_V} = \frac{20 - 20}{4,00 \cdot 10^{-3}} = 0^\circ\text{C/m}$$

$$T_1(x) = +20^\circ\text{C} = \text{constante} \quad 0.5$$

Si on prends 4 chiffres significatifs

$$a = \frac{T_{1V} - T_{int}}{e_V} = \frac{19,96 - 20}{4,00 \cdot 10^{-3}} = -10^\circ\text{C/m}$$

$$T_1(x) = -10,0 x + 20$$

Couche d'air (entre les deux vitres) :

$$T_A(x) = ax + b$$

$$T_A(e_V) = ae_V + b = T_{1V} = 20,0^\circ\text{C}$$

$$T_A(e_V + e_A) = a(e_V + e_A) + b = T_{2V} = 15,0^\circ\text{C}$$

$$a = \frac{T_{2V} - T_{1V}}{e_A} = \frac{15,0 - 20,0}{12 \cdot 10^{-3}} = -417^\circ\text{C/m} \quad 0.25*2$$

$$b = T_{1V} - ae_V = T_{1V} - \frac{T_{2V} - T_{1V}}{e_A} e_V$$

$$b = 20,0 + 417 * 4 \cdot 10^{-3} = 21,7^\circ\text{C}$$

$$T_A(x) = -417 x + 21,7 \quad 0.5$$

vitre 2 (extérieur) :

$$T_2(x) = ax + b$$

$$T_2(e_V + e_A) = a(e_V + e_A) + b = T_{2V}$$

$$T_2(2e_V + e_A) = a(2e_V + e_A) + b = T_{ext}$$

$$a = \frac{T_{ext} - T_{2V}}{e_V} = \frac{15,0 - 15,0}{4,00 \cdot 10^{-3}} = 0^\circ\text{C/m}$$

$$b = T_{2V} - a(e_V + e_A)$$

$$b = 15,0 + 0(16 \cdot 10^{-3}) = 15,0^\circ\text{C}$$

$$T_2(x) = 15,0^\circ\text{C} = \text{constante} \quad 0.5$$

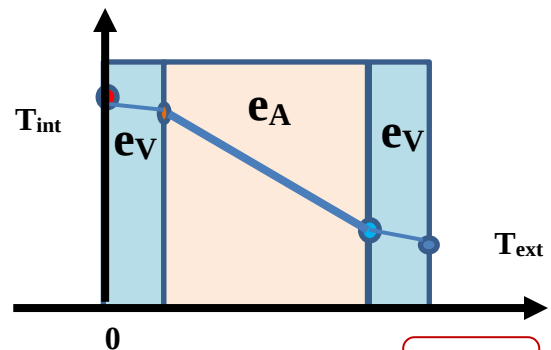
Si on prends 4 chiffres significatifs

$$a = \frac{T_{ext} - T_{2V}}{e_V} = \frac{15,00 - 15,04}{4,00 \cdot 10^{-3}} = -10^\circ\text{C/m}$$

$$b = T_{2V} - a(e_V + e_A)$$

$$b = 15,04 + 10(16 \cdot 10^{-3}) = 15,2^\circ\text{C}$$

$$T_2(x) = -10,0 x + 15,2$$



0.5*2

II. 2ème Partie : Triple vitrage

a) Résistances thermiques

$$R_T = 2R_A + 3R_V$$

$$R_T = 2 * 667 \cdot 10^{-3} + 3 * 4,94 \cdot 10^{-3} = 1,35^\circ\text{C/W} \quad 0.5$$

b) Comparaison

$$\frac{1,35}{0,677} = 2$$

La résistance du triple vitrage est deux fois plus grande. 0.5

c) Flux perdu pour le triple vitrage :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_T} = \frac{20 - 15}{1,35} = 3,70 \text{ W} \quad 0.25*2$$

d) Conclusion :

Flux perdu pour le double vitrage :

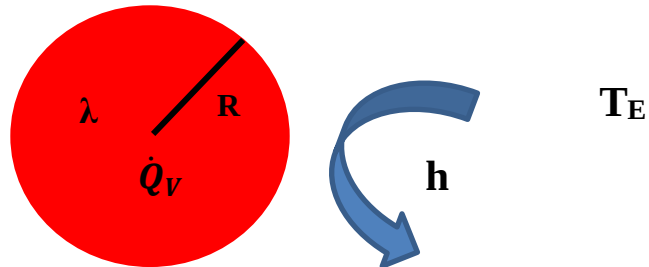
$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = 7,50 \text{ W (1ère partie)}$$

Le flux perdu par le triple vitrage est deux fois moins important. 0.5

Les résultats numériques doivent être donnés avec une notation scientifique avec **3 chiffres significatifs**. On comptera juste avec **4 chiffres significatifs** !

Exercice 2 : Conduction dans une sphère avec source de chaleur (8 points)

Une sphère métallique de rayon R et de conductivité λ est le siège d'une source de chaleur répartie uniformément sur tout le volume. On note $\dot{Q}_V$ la puissance volumique de cette source (W/m^3). La sphère échange avec l'extérieur par convection, le coefficient de transfert de la chaleur par convection est noté h , La température loin de la sphère est notée T_E .



- Déterminer l'expression du profil de température dans la sphère.
 - Afin de déterminer les deux constantes qui apparaissent dans le profil de température, on utilise les deux conditions aux frontières suivantes :
 - ✓ En $r = 0$, la température doit être finie.
 - ✓ En $r = R$, La chaleur qui arrive par conduction à la surface est cédée à l'extérieur par convection.
- Déterminer ces deux constantes.
- Ecrire l'expression de la température dans la sphère sous forme simplifiée.
 - Déterminer la température à la surface de la sphère.
 - Déterminer la température au centre de la sphère.
 - Donner l'allure de la température en fonction de r .

Exercice 2 : Conduction dans une sphère avec source de chaleur (Réponse)

- Expression du profil de température
L'équation de la chaleur avec source s'écrit :

$$\Delta T + \frac{\dot{Q}_V}{\lambda} = 0$$

0.5

Le Laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{Q}_V}{\lambda} &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= -\frac{\dot{Q}_V}{\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= -\frac{\dot{Q}_V}{\lambda} r^2 \\ r^2 \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{\dot{Q}_V}{\lambda} \frac{r^3}{3} + a \end{aligned}$$

0.5

0.5

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{Q}_V}{\lambda} \frac{r^3}{3r^2} + \frac{a}{r^2} = -\frac{\dot{Q}_V}{3\lambda} r + \frac{a}{r^2}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} r^2 - \frac{a}{r} + b$$

0.5*2

b) En $r = 0$, la température doit garder une valeur finie.

$$a = 0$$

0.5

En $r = R$ $-\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = hS (T(r=R) - T_E)$

0.5

$$-\lambda S \left[-\frac{\dot{Q}_V}{3\lambda} R \right] = hS \left(-\frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} R^2 + b - T_E \right)$$

$$b = \frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} R^2 + \frac{\dot{Q}_V}{3h} R + T_E$$

0.5

c) Expression de la température

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} r^2 + \frac{\lambda}{h} \left[\frac{\dot{Q}_V}{3\lambda} R \right] + \frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} R^2 + T_E$$

$$T(r) = -\frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} (r^2 - R^2) + \frac{\dot{Q}_V}{3h} R + T_E$$

0.5*2

d) Expression de la température en $r = R$

$$T(r=R) = \frac{\dot{Q}_V}{3h} R + T_E$$

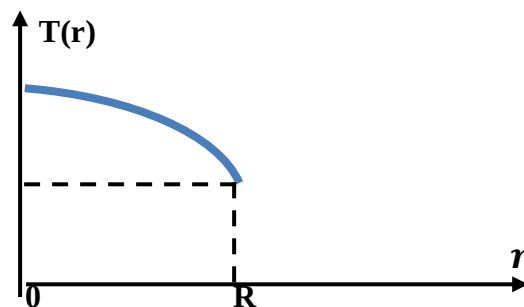
0.5*2

e) Température au centre de la sphère

$$T(r=0) = \frac{\dot{Q}_V}{6\lambda} R^2 + \frac{\dot{Q}_V}{3h} R + T_E$$

0.5*2

f) Allure parabole



0.5*2

FORMULAIRE

Formules de transfert thermique	
Conduction et convection	
Flux de conduction (Loi de Fourier)	$\Phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$
Densité de flux de conduction (Loi de Fourier)	$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$
Flux de convection (Loi de Newton)	$\Phi = h S (T - T_f)$
Densité de flux de convection (Loi de Newton)	$\varphi = h (T - T_f)$
Résistance thermique de conduction d'une paroi d'épaisseur e	$R = \frac{e}{\lambda S}$
Résistance de convection	$R = \frac{1}{h S}$
Flux de chaleur	$\Phi = \frac{\Delta T}{R}$
Densité de flux	$\varphi = \frac{\Delta T}{RS}$
Equation de la chaleur sans source	$\Delta T = 0$
Equation de la chaleur avec source	$\Delta T + \frac{\dot{Q}_v}{\lambda} = 0$
Equation de la chaleur instationnaire	$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ a diffusivité thermique
Laplacien en coordonnées cartésiennes	$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
Laplacien en coordonnées cylindriques (Unidimensionnel suivant r)	$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$
Laplacien en coordonnées sphériques (Unidimensionnel suivant r)	$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$