Chapitre quatre : LA CONDUCTION THERMIQUE EN REGIME PERMANENT

Table des matières

I. LOI DE FOURIER

A. Densité de flux et flux thermique

Une différence de température dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique entraine un transfert thermique par conduction ayant les propriétés suivantes :

- ✓ Le transfert thermique se fait des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.
- ✓ Le transfert thermique dépend du gradient de température.
- ✓ Le transfert thermique dépend de la surface à travers laquelle il se déplace.

Il existe deux types de régime pour la conduction :

- Le régime permanent ou stationnaire, la température ne dépend alors que des coordonnées du point T(x, y, z). On alors des surfaces isothermes qui sont fixes.
- Le régime transitoire ou variable, la température dépend des coordonnées du point (x, y, z) et du temps t, T(x, y, z, t). On obtient alors des surfaces isothermes qui varient au cours. Elles se déplacent et se déforment.

Dans ce chapitre, on n'étudiera que le régime permanent.

Le transfert de la quantité de chaleur δQ se fait entre deux instants t et t+δt. On définit le flux de chaleur par :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

Le flux de chaleur est une puissance, il s'exprime en watt (W).

La chaleur traversant une surface est proportionnelle à la surface. Si la surface est deux fois grande, le flux de chaleur est deux fois plus grand si le transfert thermique se fait suivant un axe perpendiculaire à la surface. On définit alors la densité de flux thermique par :

$$\varphi = \frac{\delta \Phi}{\delta S}$$

La densité de flux de chaleur est une puissance par unité de surface, il s'exprime en watt par mètre carré. (W /m^2).

B. Enoncé de la loi de Fourier

Le vecteur densité de flux est donné par :

$$\vec{\varphi} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,(T) = -\lambda\vec{\nabla}\,(T)$$

En coordonnées cartésiennes, on peut alors écrire :

$$\begin{pmatrix}\varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}\frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Le gradient est un vecteur normal à la surface isotherme.

Le vecteur densité de flux $\vec{\varphi}$ est colinéaire au gradient de température et de sens opposé.

La norme de la densité de flux est proportionnelle au gradient.

La densité de flux $\vec{\varphi}$ s'exprime en W / m^2.

Le gradient de la température s'exprime en K / m.

La constante λ appelé conductivité thermique s'exprime en W m^{-1} K^{-1}.

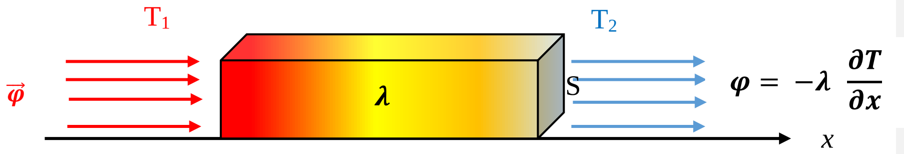
La conductivité thermique (λ) est une caractéristique propre à chaque matériau.

Elle indique la quantité de chaleur qui se propage par conduction thermique :

- en une seconde,
- à travers un m² d'un matériau,
- d'épaisseur un mètre,
- lorsque la différence de température entre les deux faces est de 1 K (1 K = 1 °C).
- La **conductivité thermique** λ traduit l'aptitude d'un matériau à conduire plus ou moins bien la chaleur.
- Plus la conductivité thermique λ est élevée et moins le matériau est un bon isolant.

Dans le cas d'un transfert en coordonnées cartésiennes selon un seul axe x, on peut écrire :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$



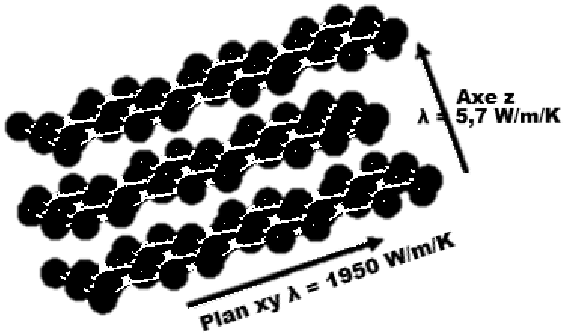
C. Mise en évidence expérimentale : Expérience de Ingen Housz

L'expérience du physicien hollandais J. Ingen Housz, qui date de 1789, permet de comparer la diffusion thermique (conduction) dans plusieurs matériaux métalliques. On la réalise facilement en enduisant de cire (température de fusion : 60 °C) des tiges métalliques (cuivre, aluminium, Fer, zinc), géométriquement identiques, dont une extrémité est en contact avec un thermostat, par exemple un bain d'eau bouillante.
On constate que la température, en des points homologues sur les tiges, augmente au cours du temps, mais plus ou moins rapidement d'une tige à l'autre ; à tout instant en cours d'expérience, les longueurs de cire fondue permettent de comparer le comportement thermique de chaque matériau : la plus grande longueur est obtenue avec le matériau le plus conducteur de la chaleur, ici le cuivre.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Jan Ingenhousz (ou Jan Ingen-Housz) est un médecin et un botaniste britannique d'origine néerlandaise, 1730 - 1799.

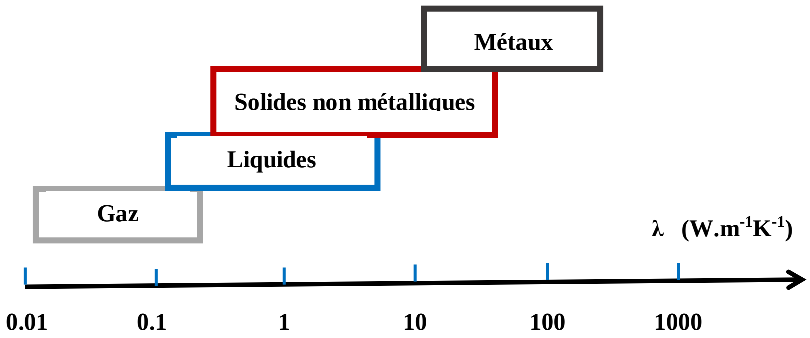
Fils de marchand, le médecin Sir John Pringle (1707-1782) l'encourage à entreprendre des études de médecine. À la mort de son père, il s'installe à Londres à l'invitation de Pringle, alors président de la Royal Society et médecin du roi. Ingenhousz fréquente de grands scientifiques comme Joseph Priestley (1733-1804) et Benjamin Franklin (1706-1790).</td>
</tr>
</table>

La conductivité thermique du graphite est **anisotrope** : cette anisotropie est due à la structure particulière du graphite. On peut donc considérer deux propagations différentes suivant la direction choisie car les *propriétés physiques sont différentes suivant les axes.* Dans le plan xy parallèle aux feuillets, la conductivité est très forte, alors que selon l'axe z perpendiculaire aux feuillets, elle est beaucoup moins élevée.



Matériau	Conductivité λ $Wm^{-1}K^{-1}$
Métal (bon conducteur)	400
Verre	0.8
Bois	0.2
Laine de verre	0.04
Air	0.03
Polystyrène expansé	0.004

Ordre de grandeur de quelques conductivités thermiques



La loi de Fourier de la conduction thermique a la même forme que la loi d'Ohm.

$$\vec{\varphi} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\,(T) \qquad \vec{J_e} = -\sigma \overrightarrow{grad}\,(V)$$

$\vec{\varphi} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\,(T)$	$\vec{J_e} = -\sigma\, \overrightarrow{grad}\,(V)$
$\vec{\varphi}$: Densité de flux thermique	$\vec{J_e}$: Densité de courant électrique
T : Température	V : Potentiel électrique
λ : Conductivité thermique	σ : Conductivité électrique

1. Conductivité thermique des solides

Pour les solides non métalliques, le transfert de chaleur se fait par l'intermédiaire des vibrations d'atomes des plus énergétiques vers les atomes voisins les moins énergétiques. Cette propagation de la chaleur est caractérisée par la conductivité thermique qui dépend de la température.

Lorsque le solide est divise, en poudre ou en fibre par exemple, sa conductivité diminue lorsque sa densité diminue. En effet, le solide contient une certaine quantité d'air qui modifie sa densité. Si, par exemple on tasse de la laine de verre ou la laine de roche on augmente sa densité et donc on augmente sa conductivité et on diminue donc le pouvoir d'isolation du matériau.

La conductivité dépend aussi du l'humidité à l'intérieur du matériau, elle augmente d'une façon exponentielle en fonction de l'humidité relative H (%).

$$\lambda = \lambda_0 e^{0.08H}$$

Pour les solides métalliques, la conductivité thermique est assez élevée. Les métaux sont de bons conducteurs électriques et de bons conducteurs thermiques. Pour une température T donnée, les conductivités électriques et thermiques sont proportionnelles. Une augmentation de la température accroit la conductivité thermique λ mais décroit la conductivité électrique σ. Ce comportement a été étudié par Wiedemann-Franz.

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT$$

L : nombre de Lorenz = constante. ($W\ \Omega\ K^{-2}$)

Unités :

λ	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$
T	K
σ	$\Omega^{-1} m^{-1}$

En général, la conductivité thermique d'un solide dépend de la température suivant une fonction polynôme :

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + a\,\theta + b\,\theta^2 + c\,\theta^3 + \cdots\right)$$

Dans la plupart des cas, on se limite au premier degré.

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + a\,\theta\right)$$

a coefficient de température de la conductivité thermique.

$[a] = \Theta^{-1}$

Pour les mauvais conducteurs a est positif. Pour les métaux et alliages a est négatif.

R **Résistance** **Ohm(Ω)**	**G = 1 / R** **Conductance** **Siemens(s ou Ω^{-1})**
ρ **Résistivité** **Ohm-mètre(Ω.m)**	**σ = 1 / ρ** **Conductivité** **$Ohm^{-1}.metre^{-1}(\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou $s.m^{-1}$)**
R = ρ l /s **l : longueur du câble, s sa section**	**G = σ s/l**

2. Conductivité thermique des liquides

La détermination de la conductivité thermique d'un liquide peut se faire en utilisant la formule établie par Bridgman.

$$\lambda = 3\,k\,\frac{v_s}{Z^2}$$

λ : conductivité thermique ; k : constante de Boltzmann ; v_s : vitesse du son dans le liquide ;

Z : distance moyenne entre deux molécules.

3. Conductivité thermique des gaz

La conductivité thermique d'un gaz parfait est donnée par la formule suivante :

$$\lambda = \frac{n\,\langle v\rangle\,\bar{l}\,C_V}{3\,\mathcal{N}_A}$$

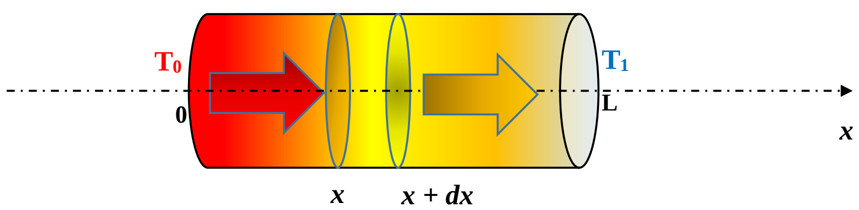
λ : conductivité thermique ; n : nombre de particules /unite de volume ; $\langle v\rangle$:vitesse moyenne ;

$\bar{l}$ libre parcours moyen ; $C_V$capacite calorifique a volume constant ; $\mathcal{N}_A$ nombre d'Avogadro.

D. Résistance thermique

Soit une barre cylindrique de section S et de longueur L calorifugé latéralement. On suppose que la température des extrémités est fixe et qu'il n'y a aucun fluide autour du cylindre et donc il n'y a pas d'échange de chaleur par convection.

$$T(x=0) = T_0 \qquad T(x=L) = T_1 < T_0$$



1. Détermination du profil de température

Un profil de température s'établit dans la barre cylindrique sous la forme d'une fonction T(x).

Déterminons son expression analytique en faisant le bilan du flux de chaleur pour une tranche élémentaire entre x et x + dx.

En x : le flux de chaleur entrant est donné par : $\boldsymbol{\Phi = \iint \vec{\varphi}\,.\,d\vec{S} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_x}$

En x+dx : le flux de chaleur sortant est donné par : $\boldsymbol{\Phi' = \iint \vec{\varphi}\,.\,d\vec{S} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}}$

Le flux de chaleur total entrant dans la tranche est donc donné par :

$$\boldsymbol{\Phi - \Phi' = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} = -\lambda S \frac{d^2T}{dx^2}\,.\,dx}$$

Le flux thermique total reçu étant nul en régime stationnaire, le profil de température est une fonction affine. En effet

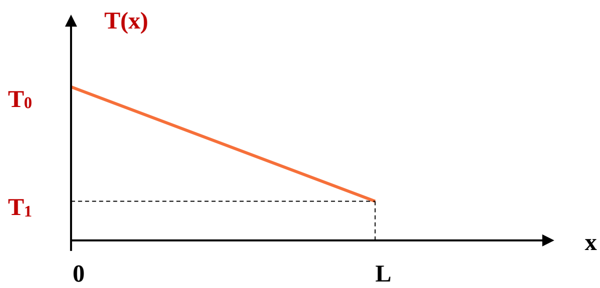
$$\boldsymbol{\Phi - \Phi' = 0 = -\lambda S \frac{d^2T}{dx^2}\,.\,dx}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$$

$$\boldsymbol{T(x) = ax + b}$$

En utilisant les conditions : $\boldsymbol{\begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_1 \end{cases}}$ on obtient :

$$\boldsymbol{T(x) = (T_1 - T_0)\frac{x}{L} + T_0}$$



Le profil de température ne dépend pas de la conductivité thermique λ et donc de la nature du matériau. Cela vient du fait qu'on est en régime stationnaire et le paramètre temps n'intervient pas.

2. Détermination du flux thermique

Le flux thermique est donné par :

$$\boldsymbol{\Phi = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right) = -\lambda\, S \frac{T_1 - T_0}{L}}$$

Le flux obtenu dépend de la nature du matériau et donc de la conductivité thermique.

$$T_0 - T_1 = \frac{L}{\lambda\, S}\Phi$$

Par analogie avec la loi d'Ohm :

$$U = V_0 - V_1 = R\,\mathrm{I}$$

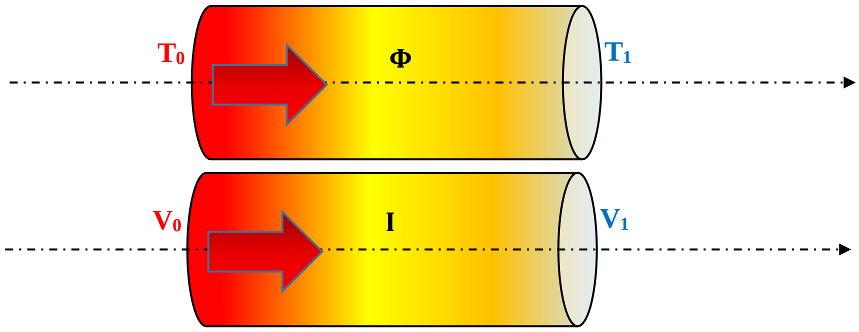
$$T_0 - T_1 = R_{th}\Phi$$

On définit la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{T_0 - T_1}{\Phi} = \frac{L}{\lambda\, S} \qquad K/W$$

On rappelle que la résistance d'un fil électrique de longueur L de section S de résistivité ρ (ou de conductivité électrique σ) est donne par :

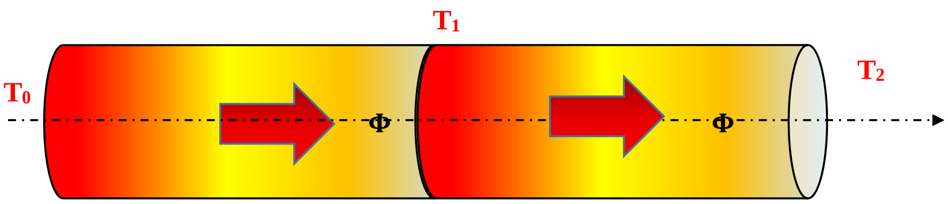
$$R = \rho\frac{L}{S} \qquad \rho = \frac{1}{\sigma}$$



En régime stationnaire, la conduction thermique fait apparaitre une résistance thermique, rapport entre la différence de température et le flux thermique. Il est alors possible, par analogie de définir des circuits électriques équivalent.

3. Associations de résistances thermiques

a) Résistances thermiques en série.

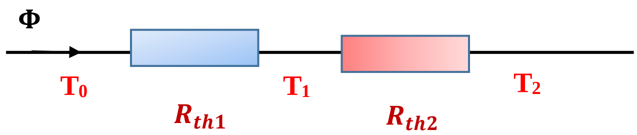


$$\boxed{T_0 - T_1 = R_{th1}\Phi} \qquad \boxed{T_1 - T_2 = R_{th2}\Phi}$$

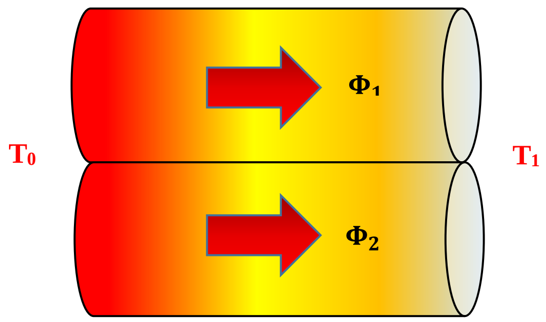
$$T_0 - T_2 = R_{th\,eq}\Phi = (R_{th1} + R_{th2})\Phi$$

On en déduit alors la résistance thermique équivalente dans le cas d'association de résistances en série.

$$R_{th\,eq} = (R_{th1} + R_{th2})$$



b) Résistances thermiques en parallèle



$$\boxed{T_0 - T_1 = R_{th1}\Phi_1}$$

$$\boxed{T_0 - T_1 = R_{th2}\Phi_2}$$

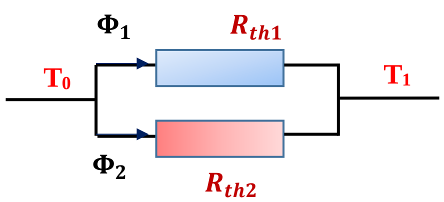
Or :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_{total}$$

d'où :

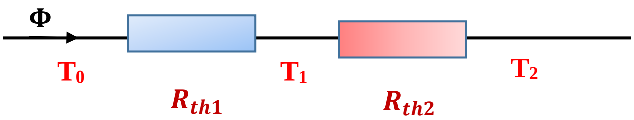
$$\frac{T_0 - T_1}{R_{th1}} + \frac{T_0 - T_1}{R_{th2}} = \frac{T_0 - T_1}{R_{theq}}$$

$$\frac{1}{R_{theq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$



Exercice d'application :

On considère deux plaques de matériaux différents modélisées par des résistances thermiques en série.



1) Etablir l'expression de la température T_1 au point de séparation des deux milieux.
2) Que se passe-t-il si $R_{th1} >> R_{th2}$?
3) Même question si $R_{th1} = R_{th2}$?
4) Dans le cas d'un double vitrage, quel modèle peut-on envisager et quelle simplification pourrait-on faire ?

Réponse :

1) On peut utiliser la loi du diviseur de tension, les différences de température jouant le même rôle que les différences de potentiel ou écrire que l'intensité du courant (flux de chaleur) est la même en chaque point.

$$\Phi = \frac{T_0 - T_1}{R_{th1}} = \frac{T_0 - T_2}{R_{th1} + R_{th2}}$$

$$T_1 = T_0 - \frac{R_{th1}}{R_{th1} + R_{th2}}(T_0 - T_2)$$

2) si $R_{th1} >> R_{th2}$

$$T_1 = T_2$$

La résistance thermique 2 n'a aucune incidence, c'est la résistance la plus forte qui l'emporte.

3) $R_{th1} = R_{th2}$

$$T_1 = T_0 - \frac{1}{2}(T_0 - T_0) = \frac{T_0 + T_0}{2}$$

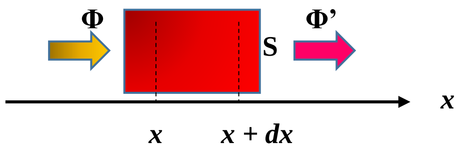
On obtient alors une température moyenne si les deux résistances thermiques sont égales.

4) Dans le cas d'un double vitrage, on a un modèle à trois couches, deux couches de verre séparées par une couche d'air. On a alors trois résistances thermiques en série. La somme des trois résistances est égale à celle de l'air.

II. EQUATION DE LA CHALEUR

A. Bilan thermique

On considère un milieu homogène de masse volumique μ, de capacité thermique massique c_P et de conductivité thermique λ. On étudie l'évolution de la température en fonction du temps et de l'espace à travers une section S du milieu : T(x, t).



Le flux thermique Φ en x est donné par : $\Phi(\mathrm{x,t}) = \varphi(x,t).\mathrm{S}$

Le flux thermique Φ en x+dx est donné par : $\Phi(\mathrm{x+dx,t}) = \varphi(x+dx,t).\mathrm{S}$

φ étant le densité de flux thermique ou flux surfacique.

La variation de flux thermique est donnée par :

$$\boldsymbol{\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx = -\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,S\,dx}$$

La quantité de chaleur reçue par l'élément dx est donnée par :

$$\boldsymbol{\delta Q = dm.c_p\,dT = \mu.Sdx.c_p\,dT = \mu.Sdx.c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}dt}$$

$$\boldsymbol{\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t) = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\mu.Sdx.c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}dt}{dt}}$$

$$\boldsymbol{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,S\,dx = \mu.Sdx.c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\,\mu\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie.

Dans le cas le plus général, dans un espace à trois dimensions, on peut alors écrire :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

B. Equation de la conduction thermique

En utilisant la loi de Fourier, avec la relation de la conservation de l'énergie

$$\vec{\varphi} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,(T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{u}_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

C. Prise en compte d'une source de chaleur

Dans certains cas, un apport de chaleur peut avoir lieu à l'intérieur du système et il faudra en tenir compte, il faut dans ce cas ajouter un terme source de chaleur dans l'équation qui tient compte de la puissance ou flux thermique créée $\dot{q}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\dot{q}$ densité volumique de puissance traduisant l'apport thermique au point considéré.

C'est l'équation de la chaleur dans sa forme la plus générale en coordonnées cartésiennes.

Dans de nombreux cas cette équation peut se simplifier :

- ✓ S'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du système alors $\dot{q} = 0$
- ✓ Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- ✓ Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de la température.

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] = \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

En effet, on a $$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

Si de plus λ ne dépend pas de la température, alors on peut écrire :

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \mu\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ce n'est pas une équation de propagation d'une onde, on aurait alors une dérivée seconde par rapport au temps.

$$\Delta T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

On pose :

$$a = \frac{\lambda}{\mu\, c_p}$$

a est appelé diffusivité thermique, notée aussi D. Unité : m^2/s.

L'équation de la diffusion thermique ou équation de la chaleur pour une seule dimension est donnée par :

$$\frac{\lambda}{\mu\, c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

La diffusivité thermique est une grandeur qui caractérise la capacité d'un matériau à transmettre un signal de température d'un point à un autre de ce matériau. La diffusivité thermique s'exprime en (m^2/s).

La capacité thermique c'est une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un matériau à stocker la chaleur. La capacité thermique s'exprime en (J/K).

La conductivité thermique λ est une grandeur qui caractérise l'aptitude d'un corps à conduire la chaleur par conduction. La conductivité thermique est exprimée en watts par mètre par kelvin ($W.m^{-1}.K^{-1}$).

Dans le cas tridimensionnel, on peut écrire :

$$\alpha\, \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Δ est le laplacien.

Expression du laplacien en coordonnées cartésiennes (x ; y ; z) :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Si le transfert ne se fait que suivant l'axe x alors :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques (ρ ; θ ; z) :

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\psi\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Si le transfert ne se fait que suivant ρ alors :

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\psi\partial}{\partial r}\right)$$

Expression du laplacien en coordonnées sphériques (r ; θ ; φ) :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\psi\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\theta\partial}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Si le transfert ne se fait que suivant la direction r et ne dépend ni de θ, ni de φ alors :

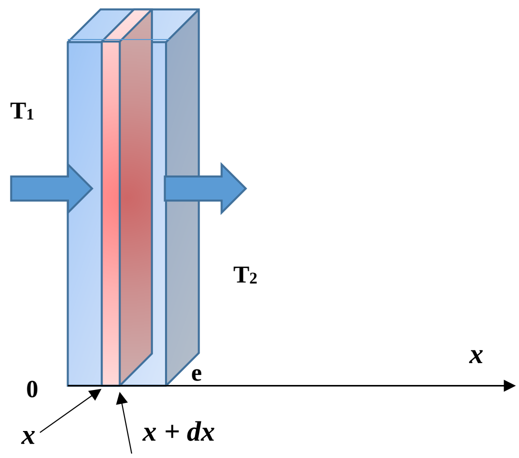
$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\psi\partial}{\partial r}\right)\right]$$

III. CONDUCTION THERMIQUE UNIDIMENSIONNELLE

A. Plaque ou mur plan

On considère ici que le transfert de chaleur se fait selon une seule direction, une seule coordonnée spatiale suffit pour résoudre le problème.

On considère une plaque d'épaisseur e, de conductivité λ et de section S très grande, maintenues à des températures T_1 et T_2. On cherche à déterminer le profil de température ainsi que la densité de flux de chaleur en l'absence de convection.



Pour résoudre ce problème, il existe différentes méthodes.

On peut résoudre directement l'équation de la chaleur ou faire un bilan thermique sur un petit élément dx de la plaque compris entre x et x+dx.

Le flux de chaleur étant conservé, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}+\mathbf{dx}) \Longrightarrow -\lambda S\left(\frac{dT}{dx}\right)_x = -\lambda S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$$

$$\frac{dT}{dx} = a \quad \Longrightarrow \quad T(x) = ax + b$$

Avec les conditions aux limites T(x= 0) =T_1 et T(x= e) =T_e =T_2 , on obtient :

$$T(x) = -\frac{x}{e}(T_1 - T_2) + T_1$$

On obtient une variation linéaire de la température.

Si on utilise l'équation de la chaleur : $\Delta T = 0$, on obtient l'équation de la deuxième ligne :

$$\frac{dT}{dx} = a \quad \Longrightarrow \quad T(x) = ax + b$$

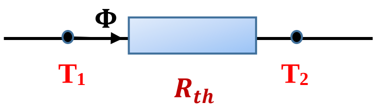
La densité de flux de chaleur est donnée par :

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = -\lambda\frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{e}(T_1 - T_2)$$

Le flux de chaleur est alors donné par :

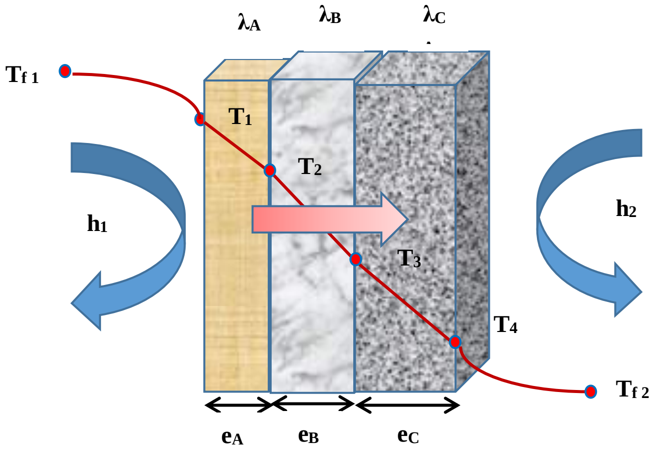
$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})S = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = cste$$

R_{th} est la résistance thermique.



B. Plaque ou mur multicouche

C'est un cas très fréquent, il s'agit de plusieurs couches de plaques ou de murs de matériaux différents caractérisés par des conductivités λ_A, λ_B et λ_C . On suppose connues les deux températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces extrêmes de section S qui sont en contact avec un fluide, l'air ou un liquide par exemple. L'échange de chaleur entre les fluides et les deux surfaces est caractérisé par deux coefficients de convection h_1 et h_2. On étudiera le régime permanent, le flux de chaleur se conserve alors et on tiendra compte de la convection entre les deux surfaces et le fluide.



En régime permanent et en l'absence de source de chaleur, le flux de chaleur se conserve.

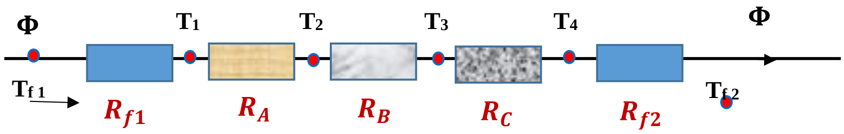
$$\Phi = h_1 S(T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda_A S}{e_A}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda_B S}{e_B}(T_2 - T_3) = \frac{\lambda_C S}{e_C}(T_3 - T_4) = h_{2S}(T_4 - T_{f2})$$

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_A}{\lambda_A S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_B}{\lambda_B S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_C}{\lambda_C S}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{h_2 S}}$$

Rappel mathématique :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f} = k$$

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\sum R}$$



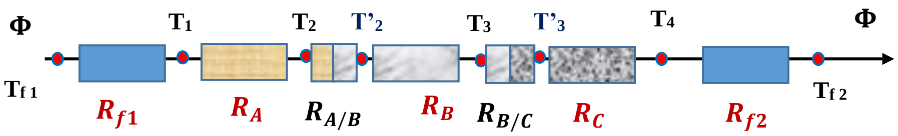
$$R_{f1} = \frac{1}{h_1 S} \quad ; \quad R_{f2} = \frac{1}{h_2 S}$$

$$R_i = \frac{e_i}{\lambda_i S} \quad avec \quad i = A; B; C$$

Dans cet exemple, on a supposé que le contact entre les différentes plaques était parfait. C'est à dire que l'on passait d'une plaque à une autre sans résistance thermique. Dans la réalité, il existe toujours une résistance thermique de contact entre deux plaques différentes due au fait qu'entre les deux surfaces il y a toujours une toute petite couche d'air qui empêche d'avoir un contact parfait. Dans certains cas, on utilise une pâte thermique ou on soude les deux plaques pour diminuer l'effet de cette résistance de contact.

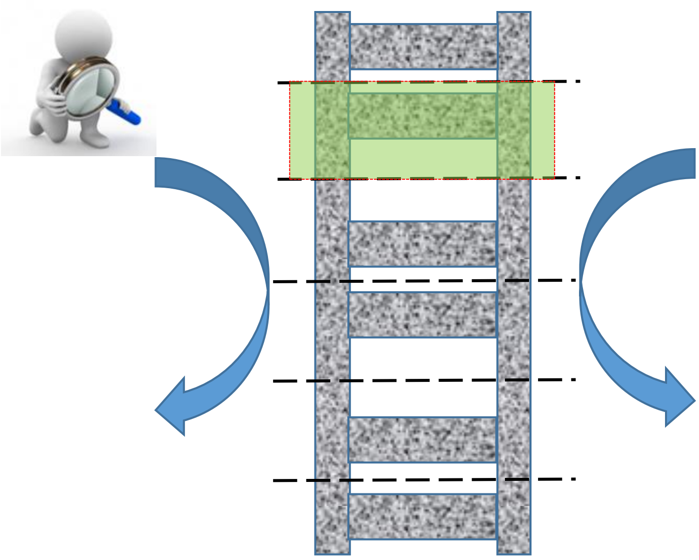
Dans notre cas, on a deux résistances thermiques de contact qu'il faut ajouter pour avoir la résistance totale.

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\sum R} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{A/B} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{B/C} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}}$$



C. Mur multicouche hétérogène

Le cas d'un mur multicouche hétérogène est un cas très courant utilisé pour l'isolation. Il s'agit de couches comportant des cavités vides (contenant de l'air). Voir photos.



Afin de simplifier la résolution de ce problème de transfert thermique à travers ce mur unidimensionnel, une étude de symétrie permet de mettre en évidence l'existence d'un motif élémentaire se répétant à l'identique. On fera donc l'étude sur cet élément compris entre deux droites horizontales successives en pointillés. On a deux milieux de nature différente : le solide en gris et l'air par exemple de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2.

Le flux de chaleur à travers la surface de hauteur l et de largeur L va traverser successivement la zone d'épaisseur e_1 et de conductivité λ_1, ensuite la zone d'épaisseur e_2 constituée de 3 zones en dérivation et enfin la zone d'épaisseur e_3.

On peut alors déterminer la résistance totale en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle.

Les résistances dues à la convection à travers la section S = L*l sont données par :

$$R_{1C} = \frac{1}{h_1 L * l} \qquad R_{2C} = \frac{1}{h_2 L * l}$$

Le flux de chaleur à travers la surface S= L*l traversant la tranche d'épaisseur e_1 donne lieu à une résistance égale a :

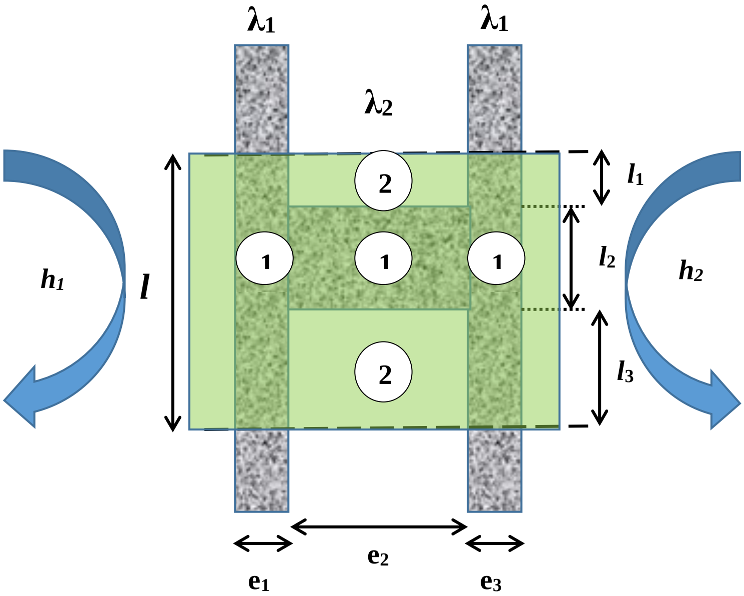
$$R_1 = \frac{1}{\lambda_1 S}$$

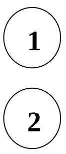
Ce même flux de chaleur traversant la tranche e_2 de surface S= L*l composée de trois résistances en dérivation ayant des surfaces différentes.

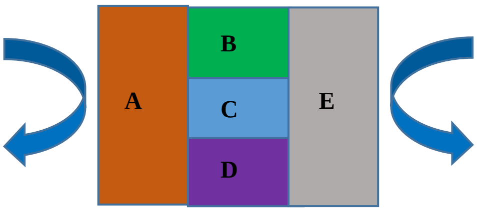
$$R_2 = \frac{1}{\lambda_2 L * l_1} \qquad R_2' = \frac{1}{\lambda_1 L * l_2} \qquad R_2'' = \frac{1}{\lambda_2 L * l_3}$$

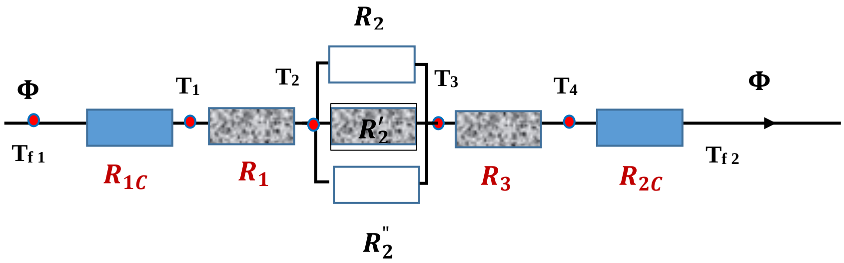
Et enfin la dernière zone d'épaisseur e_3 de surface S =L*l :

$$R_3 = \frac{1}{\lambda_1 L * l}$$









La résistance thermique équivalente est donnée par : 1

$$R_{eq} = R_{1C} + R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''}} + R_2 + R_{2C}$$

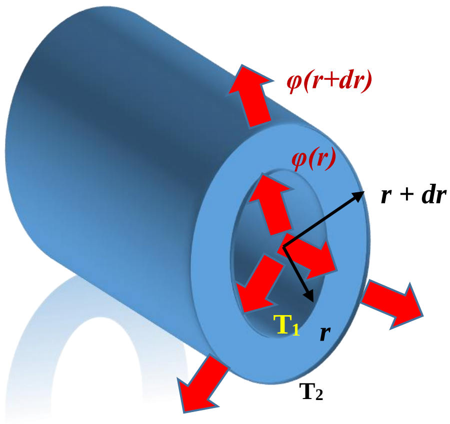
D. Cylindre creux

L'étude du cylindre creux de conductivité thermique λ est intéressante car elle donne lieu à de nombreux cas pratiques. Soient r_1 et r_2 les rayons intérieur et extérieur du cylindre de longueur L. Soient T_1 et T_2 les températures des faces interne et externe du cylindre. Déterminons le profil de température dans l'épaisseur du cylindre $e = r_2 - r_1$ en l'absence de convection.

On peut utiliser l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

Ou faire un bilan thermique entre le rayon intérieur et extérieur du cylindre.



$$\Phi(r) = -\lambda 2\pi r L\left(\frac{dT}{dr}\right)_r$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}+\mathbf{dr}) \Rightarrow -\lambda 2\pi(r+dr)L\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$$

La conservation du flux thermique permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = -\lambda 2\pi r L\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}+\mathbf{dr}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \Rightarrow -\lambda 2\pi r L\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r} = -\lambda 2\pi(r+dr)L\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$$

$$r\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r} = (r+dr)\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr} = \left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] = cste$$

On en déduit que :

$$r\left(\frac{dT}{dr}\right) = C$$

C'est ce que donne l'équation de la chaleur en coordonnées cylindrique (voir plus haut).

$$\left(\frac{dT}{dr}\right) = \frac{C}{r} \qquad \Rightarrow T(r) = C\,ln(r) + K$$

En utilisant les conditions au niveau des faces internes et externes, on peut écrire :

$$T(r_1) = T_1 = C\,ln(r_1) + K \quad et \quad T(r_2) = T_2 = C\,ln(r_2) + K$$

Deux équations à deux inconnues C et K.

$$C\,ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = T_2 - T_1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T_2 - T_1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$K = T_1 - C\,ln(r_1) = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\,ln(r_1)$$

$$T(r) = \frac{T_2 - T_1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\,ln(r) + T_1 - \frac{T_2 - T_1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\,ln(r_1)$$

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

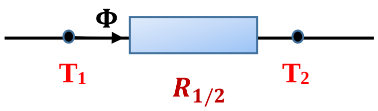
Le flux thermique est donné par :

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = -\lambda 2\pi r L\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r} = -\lambda 2\pi r L(T_2 - T_1)\frac{\frac{1}{r_1}\frac{r_1}{r}}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$\Phi(\mathrm{r}) = -2\pi\lambda L \frac{T_2 - T_1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = cste$$

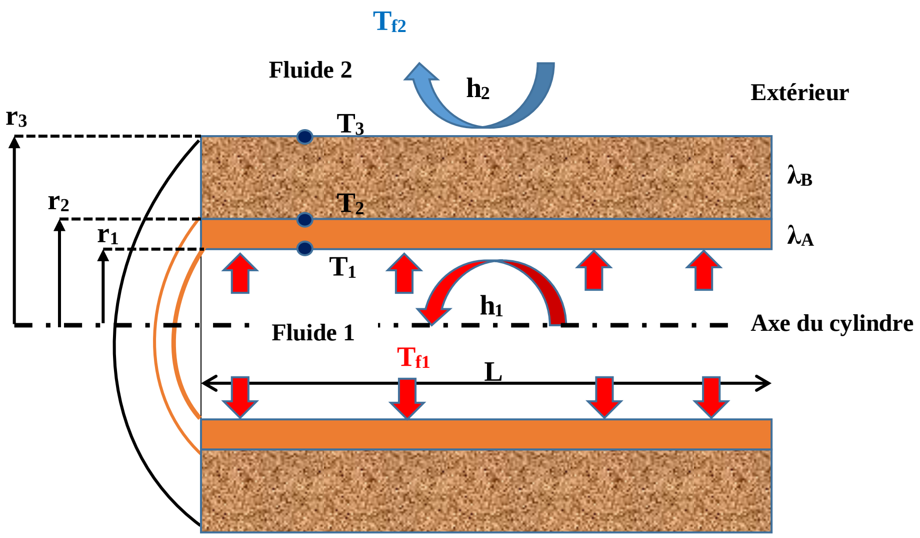
A partir de cette relation on peut alors déterminer la résistance thermique R entre les surfaces 1 et 2 :

$$R_{1/2} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi(\mathrm{r})} = \frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$$



E. Cylindre creux multicouches

Il s'agit ici d'un tube creux recouvert d'une couche d'un matériau différent. On suppose qu'à l'intérieur du tube on a un échange de chaleur par convection ainsi qu'à l'extérieur. On notera h_1 et h_2 les coefficients de convection des deux fluides respectivement à l'intérieur et à l'extérieur. La température des deux fluides est T_{f1} et T_{f2}. Les différentes caractéristiques sont indiquées sur la figure. Il n'y a pas de source de chaleur et la propagation de la chaleur est radiale. On étudie le régime permanent.



Le flux de chaleur est conserve à travers les différentes couches.

Le flux de chaleur à travers la surface intérieure dû à la convection est donné par :

$$\Phi = h_1 2\pi r_1 L(T_{f1} - T_1)$$

Le flux de chaleur à travers la surface de conductivité thermique λ_A est donné par :

$$\Phi = \lambda_A 2\pi L \frac{(T_1 - T_2)}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Le flux de chaleur à travers la surface de conductivité thermique λ_B est donné par :

$$\Phi = \lambda_B 2\pi L \frac{(T_2 - T_3)}{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}$$

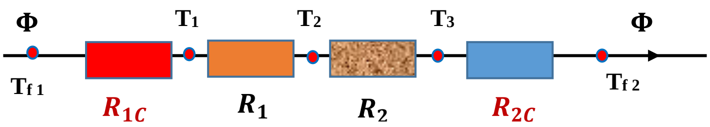
Le flux de chaleur à travers la surface extérieure dû à la convection est donné par :

$$\Phi = h_2 2\pi r_3 L(T_3 - T_{f2})$$

$$\Phi = h_1 2\pi r_1 L(T_{f1} - T_1) = \lambda_A 2\pi L \frac{(T_1 - T_2)}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \lambda_B 2\pi L \frac{(T_2 - T_3)}{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L(T_3 - T_{f2})$$

En isolant les différences de température en fonction du flux de chaleur et en additionnant membre a membre, on obtient :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \lambda_A} + \frac{ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi L \lambda_B} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}}$$



IV. CONDUCTION THERMIQUE MULTIDIMENSIONNELLE

Dans beaucoup de cas, la conduction thermique ne dépend pas uniquement d'une seule coordonnée. On étudiera le cas bidimensionnelle, la conduction de la chaleur dépend alors de deux coordonnées.

Dans le cas bidimensionnel, en stationnaire, en l'absence de source, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation et déterminer le champ de température T(x,y), il existe plusieurs méthodes :

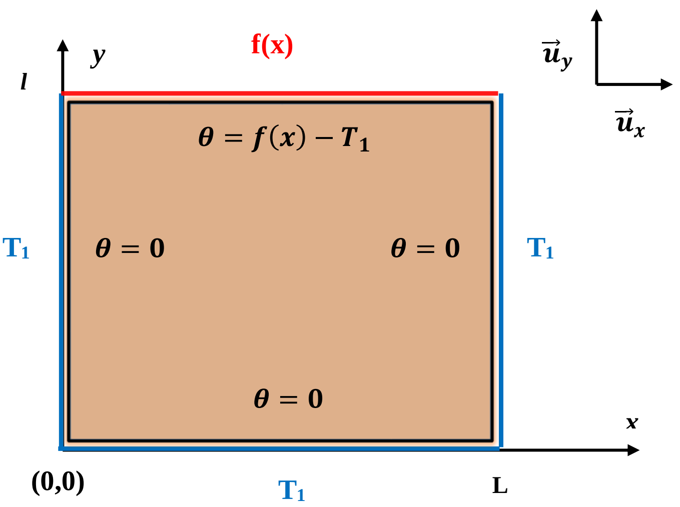
- La méthode analytique
- La méthode numérique
- La méthode analogique
- La méthode graphique

A. La méthode analytique

La méthode analytique ne peut être utilisée que dans des cas ou la géométrie et les conditions aux limites sont simples. On obtient alors la solution exacte sous forme de fonctions mathématiques.

Considérons une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur *l*. La température est maintenue constante et égale à T_1 sur les bords x = 0 ; x = L et y = 0.

Sur le côté y = *l*, pour x compris entre 0 et L, La température imposée obéit à une loi mathématique f(x).



Résolvons l'équation de la chaleur par la méthode de la séparation des variables et la théorie des fonctions orthogonales. Nous admettons alors que la solution peut s'écrire sous la forme d'un produit de fonctions, chaque fonction ne dépendant que d'une seule variable.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 [X(x)\, Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)\, Y(y)]}{\partial y^2} = 0$$

$$Y(y)\, \frac{\partial^2 [X(x)\,]}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 [\, Y(y)]}{\partial y^2} = 0$$

On divise les deux membres de l'équation par $X(x)\, Y(y)$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 [X(x)\,]}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 [\, Y(y)]}{\partial y^2} = 0$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que si chaque terme est constant, en effet le premier terme ne dépend que de x et le second ne dépend que de y.

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 [X(x)\,]}{\partial x^2} = +\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 [\, Y(y)]}{\partial y^2} = cste = C^2$$

La constante C^2 peut être positive ou négative, dans le cas négatif il suffit de remplacer C par iC, $(iC)^2 = -C^2$

On obtient alors un système de deux équations différentielles du second ordre homogènes.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{X(x)} \dfrac{\partial^2 [X(x)\,]}{\partial x^2} = C^2 \\ \dfrac{1}{Y(y)} \dfrac{\partial^2 [\, Y(y)]}{\partial y^2} = C^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 [X(x)\,]}{\partial x^2} + C^2 X(x) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 [\, Y(y)]}{\partial y^2} - C^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = A_0 cos(Cx) + B_0 sin(Cx)$$

$$Y(y) = A_1 ch(Cy) + B_1 sh(Cy)$$

Pour alléger les calculs, on fait un changement de variable, on aurait pu le faire avant, on introduit alors la variable :

$$\theta(x,y) = T(x,y) - T_1$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

On obtient les mêmes relations que précédemment.

$$\theta(x,y) = [A_0 cos(Cx) + B_0 sin(Cx)\,][A_1 ch(Cy) + B_1 sh(Cy)]$$

Ecrivons maintenant les conditions aux limites, sur les bords de la plaque :

$$\begin{cases} x = 0 \quad T(0,y) = T_1 \Rightarrow \theta(0,y) = 0 \quad (1) \\ x = L \quad T(L,y) = T_1 \Rightarrow \theta(L,y) = 0 \quad (2) \\ y = 0 \quad T(x,0) = T_1 \Rightarrow \theta(x,0) = 0 \quad (3) \\ y = l \quad T(x,l) = f(x) \Rightarrow \theta(x,l) = f(x) - T_1 \quad (4) \end{cases}$$

En utilisant la condition **(3)** :

$$\theta(x,0) = [A_0 cos(Cx) + B_0 sin(Cx)\,][A_1] = 0$$

$$A_1 = 0$$

En utilisant la condition **(1)** :

$$\theta(0,y) = [A_0][A_1 ch(Cy) + B_1 sh(Cy)] = 0$$

$$A_0 = 0$$

On obtient alors :

$$\theta(x,y) = B_0 B_1 sin(Cx)\, sh(Cy)$$

La condition **(2)** donne en posant **$B = B_0 B_1$**

$$\theta(L,y) = B\, sin(CL)\, sh(Cy) = 0$$

On en déduit que :

$$sin(CL) = 0 \quad \Rightarrow C_n L = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$C_n = \frac{n\pi}{L}$$

Pour chaque valeur de C_n, on obtient une valeur de B qu'on notera B_n

Il y a donc une infinité de solutions pour l'équation différentielle, la solution générale est donc donnée par la somme de toutes ces solutions.

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L}x)\ sh(\frac{n\pi}{L}y)$$

La condition (4) : $\theta(x,l) = f(x) - T_1$ donne :

$$\theta(x,l) = f(x) - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L}x)\ sh(\frac{n\pi}{L}l)$$

Pour déterminer la constante B_n , on multiplie l'équation précédente par $\sin(C_k x)$ avec $C_k = k\pi/L$ et on intègre x entre 0 et L.

$$\int_0^L (f(x) - T_1)\, sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right) \int_0^L sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^L (f(x) - T_1)\, sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx &= B_1 sh\left(\frac{\pi}{L}l\right) \int_0^L sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx \\ &+ B_2 sh\left(\frac{2\pi}{L}l\right) \int_0^L sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx \\ &+ B_3 sh\left(\frac{3\pi}{L}l\right) \int_0^L sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\ dx\ + \cdots\end{aligned}$$

Toutes ces intégrales sont nulles sauf dans le cas ou k = n.

$$\int_0^L sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ dx = \frac{L}{2}$$

Voir annexe sur la théorie des fonctions orthogonales.

On obtient donc :

$$\int_0^L (f(x)-T_1)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = B_n sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

On en déduit alors :

$$B_n = \frac{2}{L\,sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)}\int_0^L (f(x)-T_1)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

Et la solution est alors donnée par :

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(\frac{n\pi}{L}x)\;sh(\frac{n\pi}{L}y)$$

$$\theta(x,y) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh(\frac{n\pi}{L}y)}{sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)}\;sin(\frac{n\pi}{L}x)\;\int_0^L (f(x)-T_1)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

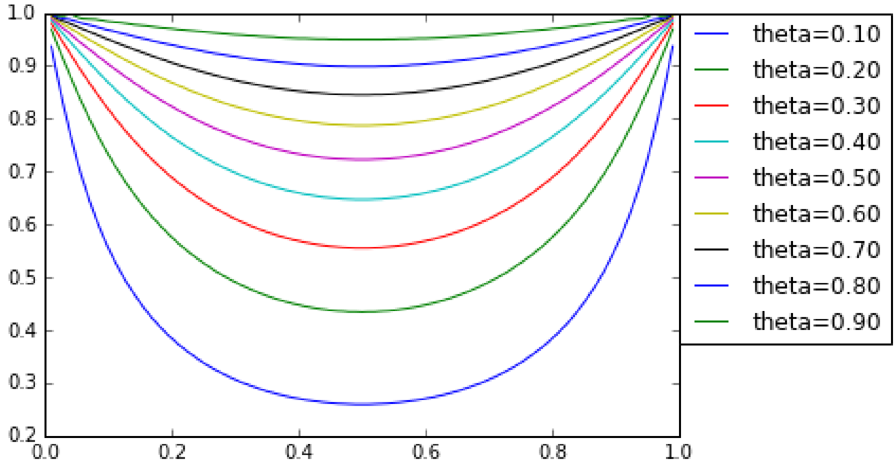
Dans le cas où la température sur y = *l* est constante et égale à T_2, on obtient alors en remplaçant f(x) par T_2 :

$$\theta(x,y) = (T_2-T_1)\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh(\frac{n\pi}{L}y)}{sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)}\;sin(\frac{n\pi}{L}x)\;\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

$$\theta(x,y) = (T_2-T_1)\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh(\frac{n\pi}{L}y)}{sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)}\;sin(\frac{n\pi}{L}x)\;\left[-\frac{L}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L$$

$$\theta(x,y) = (T_2-T_1)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{sh(\frac{n\pi}{L}y)}{sh\left(\frac{n\pi}{L}l\right)}\;sin(\frac{n\pi}{L}x)\;[1-(-1)^n\,]$$

Les isothermes, lieu des points ayant la même température, sont des courbes le long desquelles il n'y a pas de transfert de chaleur. Voir le tracé avec Python.



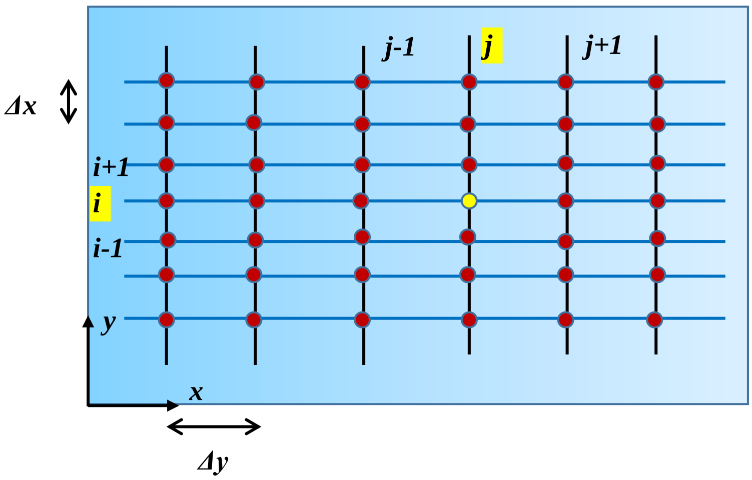
B. Méthodes numériques

1. Généralités

Pour de nombreux cas pratiques, l'équation de la chaleur n'a pas de solution analytique. La géométrie particulière et les conditions aux limites complexes ne permettent pas de résoudre cette équation. On utilise alors des méthodes numériques. La méthode numérique qui consiste à discrétiser les différentes variables est appelée la méthode des différences finies. Les valeurs numériques des différentes variables sont déterminées en des points particuliers à des intervalles réguliers dans l'espace et dans le temps.

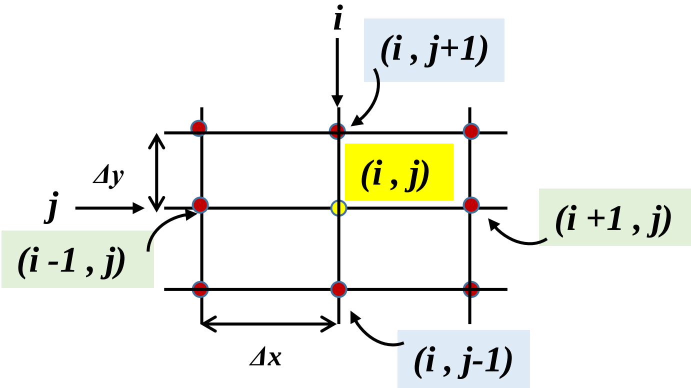
Commenté [jb1]:

Dans ce chapitre, nous allons étudier la méthode des différences finies qui transforment les dérivées en des différences. On obtient alors un système d'équations linéaires qu'on pourra résoudre. Ci-dessous un exemple de maillage les points rouges représentent les nœuds.



2. Définition du maillage

Avant tout calcul, il faut définir le maillage. Les valeurs calculées se font uniquement au niveau des nœuds du maillage. Le choix du maillage dépend de la spécificité du problème et de la précision des calculs.



On doit résoudre l'équation de la chaleur en stationnaire :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Les dérivées partielles de la température selon l'axe x peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \approx \frac{T(i+1,j)-T(i,j)}{\Delta x} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2},j\right) \approx \frac{T(i,j)-T(i-1,j)}{\Delta x}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i,j) = \frac{\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{T(i+1,j)-T(i,j)}{\Delta x}-\frac{T(i,j)-T(i-1,j)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i,j) = \frac{T(i+1,j)+T(i-1,j)-2T(i,j)}{(\Delta x)^2}$$

De même, les dérivées partielles de la température selon l'axe y peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial y}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i,j+1)-T(i,j)}{\Delta y} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial y}\left(i,j-\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i,j)-T(i,j-1)}{\Delta y}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i,j) = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} = \frac{\frac{T(i,j+1)-T(i,j)}{\Delta y}-\frac{T(i,j)-T(i,j-1)}{\Delta y}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i,j) = \frac{T(i,j+1)+T(i,j-1)-2T(i,j)}{(\Delta y)^2}$$

En utilisant l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i,j) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i,j) = 0$$

On obtient alors :

$$\frac{T(i+1,j)+T(i-1,j)-2T(i,j)}{(\Delta x)^2} + \frac{T(i,j+1)+T(i,j-1)-2T(i,j)}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si de plus, on considère que le pas est le même suivant et suivant y, $\Delta x = \Delta y$, on obtient alors :

$$T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)-4T(i,j) = 0$$

Et donc :

$$T(i,j) = \frac{T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)}{4}$$

Et donc pour le nœud ***(i, j),*** l'équation différentielle est transformée alors en une équation algébrique qui peut être appliquée à tous les nœuds internes entourés de ses quatre voisins.

Si au total, on a M nœuds sur une colonne et N nœuds sur une colonne, le nombre total de nœuds et donc égal à M.N.

Pour chaque nœud, on obtient une équation linéaire.

Quand le nœud est sur la frontière, on pourra aussi écrire une équation qui dépend des conditions sur les bords.

On va étudier les différents cas.

3. Conditions au bord

Les conditions au bord ou aux limites sont fondamentales pour la résolution de l'équation de Laplace. Il y a alors plusieurs possibilités :

- ✓ La température est imposée sur les bords.
- ✓ La densité du flux de chaleur est imposée sur les bords, notamment une densité de flux égale à zéro dans le cas d'une paroi isolée.
- ✓ Il y a échange convectif avec les bords.

a) Températures imposées aux frontières.

C'est un cas simple, les conditions aux limites imposent sur le bord ou les bords une température, il suffit d'imposer cette température pour les points i,j sur le bord.

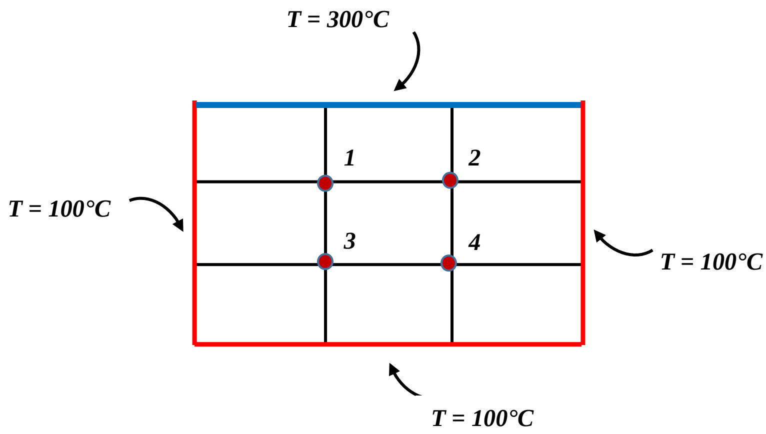
Prenons un exemple simple, une plaque de forme carrée avec une température imposée sur les quatre cotés (voir figure). Evidemment, pas de convection dans ce cas.

Utilisons la méthode précédente pour calculer la température aux nœuds 1 à 4.

Les équations aux nœuds pour les nœuds 1 à 4 sont données par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{noeud\ 1:\ T_1 = (300+100+T_3+T_2)/4} \\ \boldsymbol{noeud\ 2:\ T_2 = (100+300+T_1+T_4)/4} \\ \boldsymbol{noeud\ 3:\ T_3 = (T_4+T_1+100+100)/4} \\ \boldsymbol{noeud\ 4:\ T_4 = (100+T_2+T_3+100)/4} \end{cases}$$

On obtient alors un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues qu'on peut mettre sous la forme suivante :



$$\begin{cases} \boldsymbol{4T_1 - T_2 - T_3 = 400} \\ \boldsymbol{-T_1 + 4T_2 - T_4 = 400} \\ \boldsymbol{-T_1 + 4T_3 - T_4 = 200} \\ \boldsymbol{-T_2 - T_3 + 4T_4 = 200} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{T_1} \\ \boldsymbol{T_2} \\ \boldsymbol{T_3} \\ \boldsymbol{T_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{400} \\ \boldsymbol{400} \\ \boldsymbol{200} \\ \boldsymbol{200} \end{pmatrix}$$

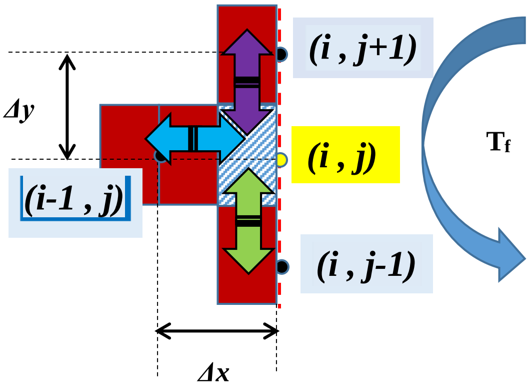
Pour obtenir les températures, il faut inverser la matrice.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T_1} \\ \boldsymbol{T_2} \\ \boldsymbol{T_3} \\ \boldsymbol{T_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{400} \\ \boldsymbol{400} \\ \boldsymbol{200} \\ \boldsymbol{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

b) Echange convectif avec l'extérieur

Dans ce cas les conditions aux limites sont liées à la convection des bords avec l'extérieur et suivant la géométrie des bords on peut établir les équations aux limites.

(1) Convection sur une surface plane.



Pour les nœuds à l'intérieur, on a la relation générale :

$$\boldsymbol{T(i,j) = \frac{T(i+1,j) + T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1)}{4}}$$

Pour les nœuds situes sur la surface externe, il faut faire un bilan d'énergie au niveau de la surface et écrire la conservation du flux de chaleur.

$$\boldsymbol{\Phi_{i-1,j \Rightarrow i,j} = \lambda(\Delta y * 1)\frac{T(i-1,j) - T(i,j)}{\Delta x}}$$

$$\boldsymbol{\Phi_{i,j+1 \Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right)\frac{T(i,j+1) - T(i,j)}{\Delta y}}$$

$$\boldsymbol{\Phi_{i1,j-1 \Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right)\frac{T(i,j-1) - T(i,j)}{\Delta y}}$$

$$\boldsymbol{\Phi_{conv} = h(\Delta y * 1)(T_f - T_{i,j})}$$

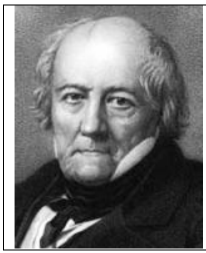
$$\boldsymbol{\sum \Phi = 0}$$

Et si en plus, on pose Δx = Δy, on obtient alors :

$$\boldsymbol{2T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1) + \frac{2h\Delta x}{\lambda}T_f - 2T(i,j)\left(\frac{h\Delta x}{\lambda} + 2\right) = 0}$$

On pose : $\boldsymbol{Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}}$

C’est le nombre de Biot, c’est un nombre sans dimension.



BIOT, JEAN-BAPTISTE
(Paris-1774, Paris-1862)

C’est un physicien, astronome et mathématicien français, pionnier de l'utilisation de la lumière polarisée pour l'étude des solutions. Renommé pour la loi de Biot et Savart et le nombre de Biot

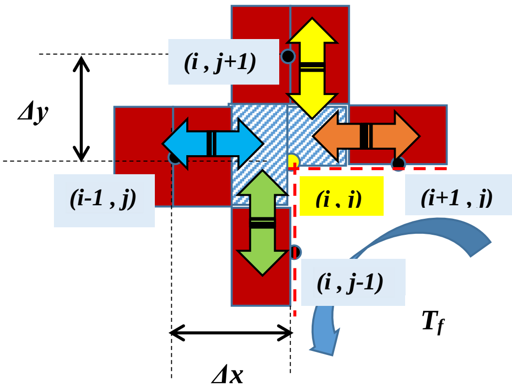
$$\boldsymbol{Bi = \frac{h\,L}{\lambda}}$$

$$\boldsymbol{2T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1) + 2\,Bi\,T_f - 2T(i,j)(Bi+2) = 0}$$

On en déduit alors :

$$\boldsymbol{T(i,j) = \frac{T(i-1,j) \;+\; \dfrac{T(i,j+1)+T(i,j-1)}{2} \;+\; Bi\,T_f}{Bi+2}}$$

(2) Convection avec un coin interne



La surface considérée au point i,j échange de la chaleur par conduction avec les 4 surfaces mitoyennes :

$$\Phi_{i,j+1\Rightarrow i,j} = \lambda(\Delta x * 1)\frac{T(i,j+1)-T(i,j)}{\Delta y}$$

$$\Phi_{i-1,j\Rightarrow i,j} = \lambda(\Delta y * 1)\frac{T(i-1,j)-T(i,j)}{\Delta}$$

$$\Phi_{i,j-1\Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right)\frac{T(i,j-1)-T(i,j)}{\Delta x}$$

$$\Phi_{i+1,j\Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta y}{2} * 1\right)\frac{T(i+1,j)-T(i,j)}{\Delta}$$

et par convection avec la surface externe :

$$\Phi_{conv} = h\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right) * 1\left(T_f - T_{i,j}\right)$$

$\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right) * 1$ est la surface en contact avec le fluide extérieur.

$$\sum \Phi = 0$$

Et si en plus, on pose Δx = Δy, on obtient alors :

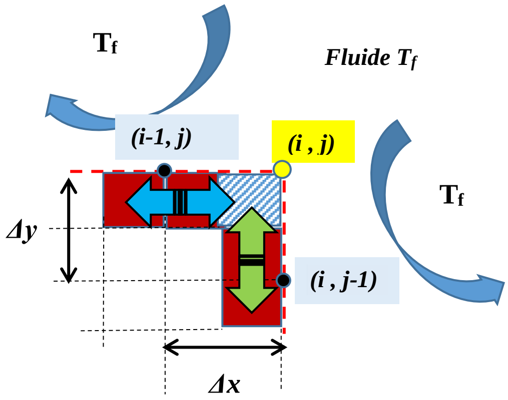
$$T(i,j+1)+T(i-1,j)+\frac{1}{2}\left(T(i,j-1)+T(i+1,j)\right)+\frac{h\Delta x}{\lambda}T_f-\left(\frac{h\Delta x}{\lambda}+3\right)T(i,j)=0$$

On en déduit alors :

On pose : $\boldsymbol{Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}}$

$$\boldsymbol{T(i,j) = \frac{T(i,j+1) + T(i-1,j) + \frac{1}{2}\big(T(i,j-1) + T(i+1,j)\big) + Bi\,T_f}{(Bi+3)}}$$

(3) Convection avec un coin externe



$$\Phi_{i-1,j \Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta y}{2} * 1\right)\frac{T(i-1,j)-T(i,j)}{\Delta x}$$

$$\Phi_{i,j-1 \Rightarrow i,j} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2} * 1\right)\frac{T(i,j-1)-T(i,j)}{\Delta y}$$

$$\Phi_{conv} = h\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right) * 1\left(T_f - T_{i,j}\right)$$

$\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right) * 1$ est la surface en contact avec le fluide extérieur.

$$\sum \Phi = 0$$

Et si en plus, on pose Δx = Δy, on obtient alors :

$$\lambda\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\frac{T(i-1,j)-T(i,j)}{\Delta x} + \lambda\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{T(i,j-1)-T(i,j)}{\Delta y} + h\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)\left(T_f - T_{i,j}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\lambda\big(T(i-1,j)-T(i,j)\big) + \frac{1}{2}\lambda\big(T(i,j-1)-T(i,j)\big) + h\Delta x\left(T_f - T_{i,j}\right) = 0$$

$$-(\lambda + h\Delta x)\,T(i,j) + h\Delta x\,T_f + \tfrac{1}{2}\lambda\ T(i-1,j) + \tfrac{1}{2}\lambda\ T(i,j-1) = 0$$

On pose : $Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$

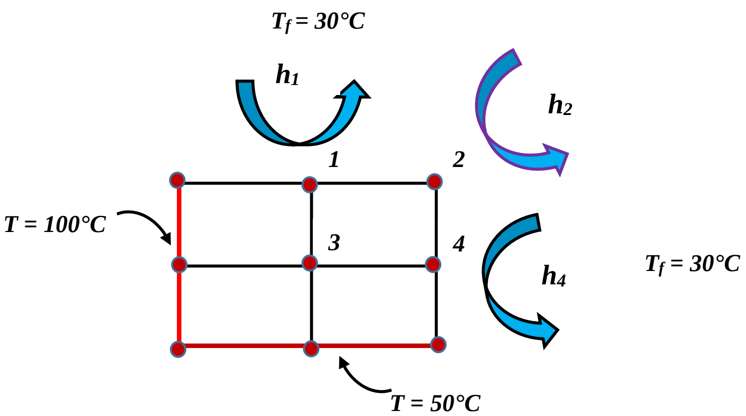
$$-2(1+Bi)\,T(i,j) + 2Bi\,T_f + T(i-1,j) + T(i,j-1) = 0$$

$$T(i,j) = \frac{\frac{T(i-1,j) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_f}{1 + Bi}$$

C. Exemples d'application.

Une plaque de forme carrée avec une température imposée sur deux côtés, les deux autres cotés sont exposés à de la convection avec un fluide (voir figure). On appellera respectivement h_1, h_4 et h_2 les coefficients de convection respectifs sur la face supérieure, la face droite et au niveau du coin supérieur droit. La conductivité de la plaque est supposée constante et égale à λ = 1W/(mK). L'espace entre deux points sur l'axe x ou sur l'axe y est le même $\Delta x = \Delta y = 0.10$m. On cherche les températures aux points 1 à 4.

h_1 = 10 W/(m^2.K) ; h_2 = 5 W/(m^2.K) ; h_4 = 10 W/(m^2.K)



Solution :

- ✓ **Nœud 1 : surface plane avec convection**

$$Bi = \frac{h_1 \Delta x}{\lambda} = \frac{10 * 0.10}{1} = 1$$

$$T(i,j) = \frac{T(i-1,j) + \frac{T(i,j+1) + T(i,j-1)}{2} + Bi\, T_f}{Bi + 2}$$

$$T_1 = \frac{T_3 + \frac{100 + T_2}{2} + 1 * 30}{1 + 2}$$

$$3T_1 - T_3 - 50 - \frac{T_2}{2} - 30 = 0$$

$$6T_1 - T_2 - 2T_3 = 160$$

- ✓ **Nœud 2 : coin extérieur**

$$Bi = \frac{h_2 \Delta x}{\lambda} = \frac{5 * 0.10}{1} = 0.25$$

$$T_2 = \frac{\frac{T_1 + T_4}{2} + Bi\, T_f}{1 + Bi}$$

$$T_2 = \frac{\frac{T_1 + T_4}{2} + 0.25 * 30}{1 + 0.25}$$

$$2.50\ T_2 = T_1 + T_4 + 15$$

$$\mathbf{T_1 - 2.50\ T_2 + T_4 = -15}$$

- ✓ **Nœud 3 : nœud à l'intérieur**

$$T_3 = \frac{T_1 + T_4 + 50 + 100}{4}$$

$$T_1 - 4T_3 + T_4 = -150$$

- ✓ **Nœud 4 : surface plane avec convection**

$$Bi = \frac{h_4 \Delta x}{\lambda} = \frac{10 * 0.10}{1} = 1$$

$$T(i,j) = \frac{T(i-1,j) + \frac{T(i,j+1) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_f}{Bi + 2}$$

$$T_4 = \frac{T_3 + \frac{50 + T_2}{2} + 1 * 30}{1 + 2}$$

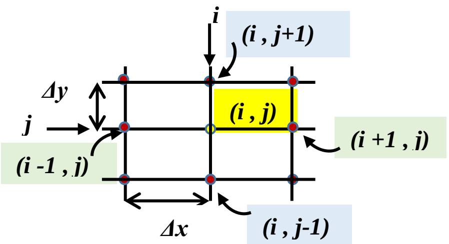
$$T_2 + 2T_3 - 6\,T_4 = -110$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2.50 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ -150 \\ -110 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2.50 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ -150 \\ -110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

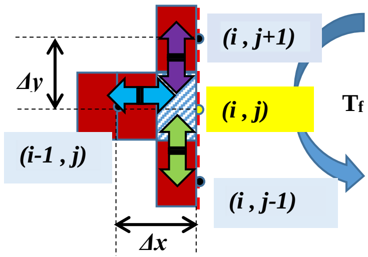
Résumé des formules des équations aux nœuds pour le calcul des différences finies.

Nœud à l'intérieur



$$T(i,j) = \frac{T(i+1,j) + T(i-1,j) + T(i,j+1) + T(i,j-1)}{4}$$

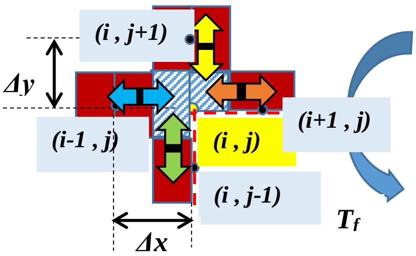
Echange convectif avec l'extérieur sur une surface plane



$$T(i,j) = \frac{T(i-1,j) + \frac{T(i,j+1) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_f}{Bi + 2}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$$

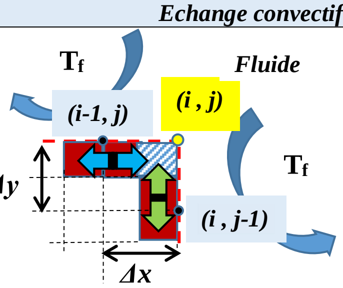
Echange convectif avec l'extérieur avec coin interne



$$T(i,j) = \frac{T(i,j+1) + T(i-1,j) + \frac{1}{2}\big(T(i,j-1) + T(i+1,j)\big) + Bi\,T_f}{(Bi+3)}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$$

Echange convectif avec l'extérieur avec coin externe



$$T(i,j) = \frac{\frac{T(i-1,j) + T(i,j-1)}{2} + Bi\,T_f}{1 + Bi}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$$